9/3/2014
Μιγαδικες
Μ.4

• $B(a,r)=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|<r\}$ ανοιχτος δισκος

A ανοιχτο αν $\forall a\in A : B(a,r)\subseteq A$

$z: \mathbb{N}\to\mathbb{C} : \forall \nu\in\mathbb{N}\ z(\nu)\in\mathbb{C} \xrightarrow{\ z_\nu\in\mathbb{C}\ }$ ακολουθια

{Η ακολουθια λεμε οτι συγκλινει οταν οσο μεγαλωνει το ν τοσο οι οροι πλησιαζουν το a}

<u>Τυπικος ορισμος</u>: $a=\lim z_\nu$ η $z_\nu\to a$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\nu_0)\ \nu\geq\nu_0\Rightarrow z_\nu\in B(a,\varepsilon)$

$|z_\nu-a|<\varepsilon$

π.χ.

$z_\nu=\dfrac{2i+\nu}{3\nu+i}=\dfrac{\frac{2i}{\nu}+1}{3+\frac{i}{\nu}}$ $\qquad \frac{i}{\nu}\xrightarrow{?}0$ (Πρεπει να ικανοποιειται ο ορισμος)

$\to\left|\frac{i}{\nu}\right|<\varepsilon$ $\qquad \frac{1}{\nu}<\varepsilon \Leftrightarrow \nu>\frac{1}{\varepsilon}$

$\nu\geq\ \nu_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

$\left[\ [x]\leq x<[x]+1\ \right]$

$z_\nu=x_\nu+iy_\nu$
$a=a+i\beta$

$|z_\nu-a|<\varepsilon$

$\leq\sqrt{(x_\nu-a)^2+(y_\nu-\beta)^2}<\varepsilon$

$|x_\nu-a|<\varepsilon$ $\to x_\nu\to a$

$|y_\nu-\beta|<\varepsilon$ $\to y_\nu\to\beta$

(αν παραλειψω τε ενα απο τα 2 καθε φορα)

Αλλιως εχουμε: Αν $z_\nu\to a$ τοτε $Re(z_\nu)\to Re(a)$
$Im(z_\nu)\to Im(a)$

$x_\nu\to a : (\forall\varepsilon>0)(\exists\nu_1)\ \nu\geq\nu_1\Rightarrow|x_\nu-a|<\varepsilon$
$y_\nu\to\beta : (\quad)(\exists\nu_2)\ \nu\geq\nu_2\Rightarrow|y_\nu-\beta|<\varepsilon$

$(\exists\nu_0=\max\{\nu_1,\nu_2\})$
$(\forall\nu\geq\nu_0)\Rightarrow \nu\geq\nu_1\Rightarrow|x_\nu-a|<\varepsilon$
$\nu\geq\nu_2\Rightarrow|y_\nu-\beta|<\varepsilon$

$\sqrt{(x_\nu-a)^2+(y_\nu-\beta)^2} < \sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2} = \sqrt{2}\cdot\varepsilon$

$=|z_\nu - a|$ $\qquad z_\nu \to a$

• z_ν φραγμένη $\Rightarrow \exists (z_{k_\nu})$ συγκλίνει

z_ν φραγμένη : $\exists M>0 : z_\nu \in B(0,M)$

$|z_\nu|<M$

$|x_\nu| \leq |z_\nu| < M \Rightarrow (x_\nu)$ φραγμ. $\Rightarrow (\exists x_{k_\nu})$ κ' $a\in\mathbb{R}$ $x_{k_\nu}\to a$

επίσης $x_{k_{\lambda_\nu}} \to a$

$|y_\nu| \leq |z_\nu| < M \Rightarrow (y_\nu)$ φραγμένη

(y_{k_ν}) φραγμ. $\Rightarrow \exists (y_{k_{\lambda_\nu}})$ κ $\beta\in\mathbb{R}$ $y_{k_{\lambda_\nu}} \to \beta$

• $z_{k_{\lambda_\nu}} = x_{k_{\lambda_\nu}} + i\, y_{k_{\lambda_\nu}} \to a + i\beta = a$

$-M \quad 0 \quad x_{k_1} \quad x_\nu \quad \frac{M}{2} \quad M$, x_{k_2}, x_{k_3}

(z_ν)

$|z_\nu - z_\mu| \xrightarrow{\nu,\mu\to\infty} 0 \Rightarrow \exists a = a + i\beta = \lim(z_\nu)$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists \nu_0)\ \nu,\mu \geq \nu_0 \Rightarrow |z_\nu - z_\mu| < \varepsilon$

$|x_\nu - x_\mu| < \varepsilon \Rightarrow \exists a : x_\nu \to a$

$|y_\nu - y_\mu| < \varepsilon \Rightarrow \exists \beta : y_\nu \to \beta$

__Σειρές__ $\quad a_0, a_1, a_2, \ldots \quad \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu$

$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \nu = 0+1+2+3+\ldots$ (δεν μπορώ να την υπολογίσω)

$\sum_{\nu=0}^{+\infty} (-\nu)^\nu$ (δεν μπορώ να υπολογίσω)

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$\vdots$

$S_\nu = a_0 + a_1 + \ldots + a_\nu$

• Αν μπορώ να επεξεργαστώ την ακολουθία αυτή μπορώ να επεξεργαστώ και την σειρά

$|w|<1 \Rightarrow w^\nu \to 0$

$a\in\mathbb{C}$ $\ |a|<1 \Rightarrow a^\nu \to 0$

$\varepsilon>0 \quad |a^\nu| < \varepsilon$

$|a|^\nu < \varepsilon$

$\nu \ln|a| < \ln(\varepsilon)$

$\nu > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|a|}$

$\rho \in (0,1)$ Παράδειγμα

$\theta \in [0, 2\pi)$ $\qquad a = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)$

$1 + \rho\sigma\upsilon\nu(\theta) + \rho^2\sigma\upsilon\nu(2\theta) + \dots = \dfrac{1-\rho\eta\mu\theta}{1+\rho^2-2\rho\sigma\upsilon\nu\theta}$ $\qquad |a| = \rho \in (0,1) \Rightarrow a^\nu \to 0$

$\underline{i\,(\rho\eta\mu(\theta) + \rho^2(\eta\mu 2\theta) + \dots\ )}$

$1 + \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta) + \rho^2(\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\,\eta\mu 2\theta) + \dots$

$$1 + a + a^2 + \dots + a^\nu = \frac{a^\nu a - 1}{a-1} = \frac{a^{\nu+1}-1}{a-1} \to \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$$

$$= \frac{1}{1-\rho\sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta} = \frac{1-\rho\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta}{\underbrace{(1-\rho\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + \rho^2\eta\mu^2\theta}_{1-2\rho\sigma\upsilon\nu\theta+\rho^2}}$$

Σειρά Σz_ν $\qquad z_0, z_1, z_2, \dots, z_\nu$

$S_0 = z_0$ $\qquad$ Πρόταση $S_\nu \to \cdot \in \mathbb{C}$

$S_1 = z_0 + z_1 \in \mathbb{C}$ $\qquad (\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)\ {}^{\nu}_{\mu} \geq \nu_0 \Rightarrow |S_\nu - S_\mu| < \epsilon$

$S_2 = z_0 + z_1 + z_2$ $\qquad \nu > \mu \geq \nu_0$

$\vdots$ $\qquad \nu = \mu + k,\ k \in \mathbb{N}$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)(\mu \geq \nu_0)(\forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow |S_{\mu+k} - S_\mu| < \epsilon$$

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ \mu \geq \nu_0 \Rightarrow |S_{\mu+k} - S_\mu| < \epsilon$$

$$|(\cancel{z_0 + z_1 + \dots + z_\mu} + z_{\mu+1} + \dots + z_{\mu+k}) - (\cancel{z_0 + z_1 + \dots + z_\mu})| < \epsilon$$

$$|z_{\mu+1} + z_{\mu+2} + \dots + z_{\mu+k}| < \epsilon$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ \mu \geq \nu_0 \Rightarrow |z_{\mu+1} + \dots + z_{\mu+k}| < \epsilon$$

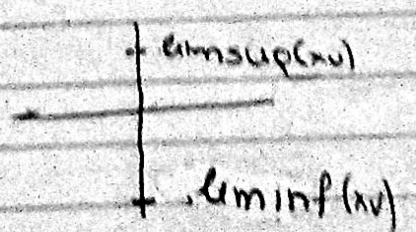
Κριτήριο σύγκρισης σειρών

$|z_\nu| \leq M_\nu$ κ' $\Sigma M_\nu < +\infty$, $\quad M_0 + M_1 + M_2 + \dots$

Σz_ν συγκλ.

$\max\{\ell \in \mathbb{R}^* \ \ell$ οριακό σημείο$\} = \limsup(x_\nu)$

$\min\{\qquad\qquad\qquad\} = \liminf(x_\nu)$



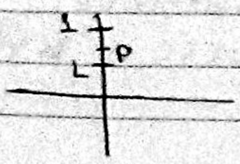
$x_\nu = \eta\mu(\nu)$

$[-1, 1]$

$\forall \ell \in [-1, 1]\ \exists k_\nu\ \eta\mu(k_\nu) \to \ell$

Υποθέτω ότι έχω τη σειρά $\sum z_\nu$ και παίρνω το $\limsup \sqrt[\nu]{|z_\nu|} = L < p$

- $L<1$



$L<p<1$ $\Rightarrow$ πάνω από το ρ έχω πεπερασμένο πλήθος αριθμών

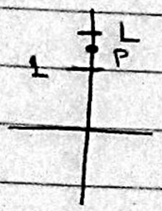
$\exists \nu_0 : \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \sqrt[\nu]{|z_\nu|} < p$

$\nu \geq \nu_0 \quad |z_\nu| < p^\nu$

$\underset{\uparrow}{\sum} p^\nu = \frac{1}{1-p}$

Συγκλίνει άρα συγκλίνει και $\sum z_\nu$

$\rightarrow$ Αν $\limsup \sqrt[\nu]{|z_\nu|} = L > 1$ Τότε η σειρά δεν συγκλίνει $(\sum z_\nu)$



$p>1$

$L>p \quad \exists k_\nu : \sqrt[k_\nu]{|z_{k_\nu}|} > p$

$|z_{k_\nu}| > p^{k_\nu} \quad \forall \nu$

$p^{k_\nu} \to +\infty$ (γιατί $p>1$)

$|z_{k_\nu}| \to +\infty$ άτοπο λόγω κριτηρίου Cauchy.

αυτό έλεγε: $(\forall \epsilon>0)(\exists \nu_0)(\forall k \in \mathbb{N})\ \mu \geq \nu_0$

$|z_{\mu+1} + \dots + z_{\mu+k}| < \epsilon$

$|z_{\mu+1}| < \epsilon$

$\Rightarrow = 1$ Δεν γνωρίζω εάν συγκλίνει